



گزینه ۴

۱

ابتدا با داشتن ضابطه $f(x)$ ، خودمان ضابطه $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم و سپس ضابطه به دست آمده را برابر با ضابطه $f(g(x))$ داده شده، قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \lambda x^3 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = \lambda g^3(x) - 1 \\ f(g(x)) = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - 1 = \underbrace{(x+1)^3} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda g^3(x) = (x+1)^3$$

$$\Rightarrow g^3(x) = \frac{(x+1)^3}{\lambda} \xrightarrow{\sqrt[3]{}} g(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{\lambda}}$$

$$\Rightarrow (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -9 + 0 = -9$$

گزینه ۳

۲

نمودار، شامل دو سهمی روبه بالا و روبه پایین در بازه‌های مختلف است. نمودار بالا در شکل یک سهمی را نشان می‌دهد که رأس آن در $x = 1$ می‌باشد. درواقع $y = x^2$ می‌باشد که یک واحد به سمت راست و یک واحد به بالا انتقال یافته است. بنابراین داریم $y = (x-1)^2 + 1$ که برای $x \geq 1$ تعریف شده است.

نمودار پایین در شکل یک سهمی روبه پایین را نشان می‌دهد که رأس آن در $x = -1$ است و درواقع نمودار $y = -x^2$ می‌باشد که یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال یافته است. بنابراین داریم: $y = -(x+1)^2 - 1$ که برای $x < -1$ تعریف شده است. چون نقطه توپر نیست، $x = -1$ را شامل نمی‌شود. بنابراین گزینه "۳" صحیح است.

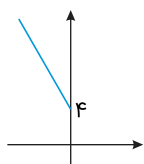
گزینه ۲

۳

$$f(x) = y = |x - 4| - x \xrightarrow{x \leq 0} y = -x + 4 - x = 4 - 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 4 - y \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \frac{x}{2}$$

توجه داشته باشید که با فرض $x \leq 0$ نمودار تابع به صورت زیر است:

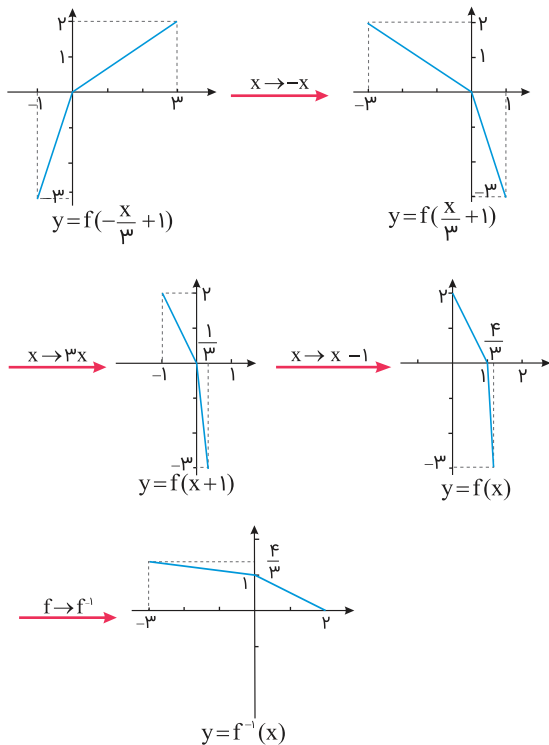


ملاحظه می‌کنید که $R_f = [4, +\infty)$ می‌باشد، پس $D_{f^{-1}} = [4, +\infty)$ است.

اگر $f(x)$ بیانگر $(x-2)^2$ باشد، در نمودار $g(x)$ ، x ها دوتا به سمت مثبت رفته‌اند و y ها سه واحد به سمت منفی، همچنین ضریب x^2 منفی برابر شده است، داریم:

$$g(x) = -(x-2-2)^2 - 3$$

$$g(x) = -(x^2 - 8x + 16) - 3 = -x^2 + 8x - 19$$



چون نمی‌دانیم k در کدامیک از محدوده‌های $x \geq 2$ و $x < 2$ قرار دارد، باید هر دو حالت را حل کنیم و سپس جواب به‌دست‌آمده را بررسی کنیم.
در محدوده $x \geq 2$:

$$f(-k) = 3 \Rightarrow 2(-k) - 1 = 3 \Rightarrow -2k = 4 \Rightarrow k = -2$$

$k = -2$ در محدوده $x \geq 2$ قرار ندارد، پس قابل قبول نیست.
در محدوده $x < 2$:

$$f(-k) = 3 \Rightarrow \frac{3(-k) + 2}{4} = 3 \Rightarrow -3k + 2 = 12 \Rightarrow k = -\frac{10}{3}$$

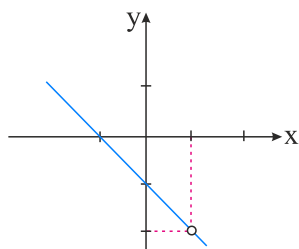
$k = -\frac{10}{3}$ در محدوده $x < 2$ قرار دارد، پس قابل قبول است.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \Rightarrow g(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{+1\}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -(x+1)$$

در نتیجه نمودار تابع $\frac{f}{g}$ یک خط راست است که نباید $x = 1$ را شامل شود.



$$D_h = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\}$$

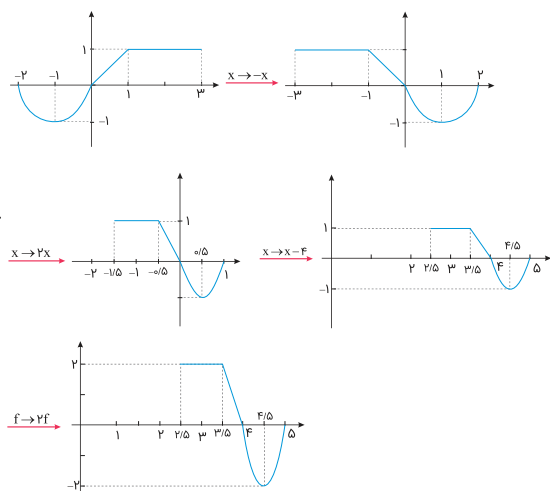
$$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{x | f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x | f(x) = 0\}$$

سؤال گفته $D_h = \mathbb{R} - \{1, b\}$ ، پس نتیجه می‌گیریم که جواب‌های معادله $f(x) = 0$ برابر با b و 1 هستند.

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + 3 - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(b) = 0 \Rightarrow b^2 + 3b - 4 = 0 \Rightarrow (b+4)(b-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ b = 1 \end{cases} \times \text{طبق سؤال} \Rightarrow \frac{b}{a} = -4$$



تابع قدر مطلق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = |-2x - 3|$$

اگر $-2x - 3$ مثبت یا صفر باشد ($-2x - 3 \geq 0$)، خروجی خود $-2x - 3$ است. اگر $-2x - 3$ منفی باشد ($-2x - 3 < 0$)، خروجی قرینه $-2x - 3$ است:

$$\begin{cases} -2x - 3 \geq 0 \Rightarrow f(x) = -2x - 3 \\ -2x - 3 < 0 \Rightarrow f(x) = -(-2x - 3) = 2x + 3 \end{cases}$$

$$f(x) = |-2x - 3| = \begin{cases} -2x - 3 & ; -2x - 3 \geq 0 \\ 2x + 3 & ; -2x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & ; x \leq -\frac{3}{2} \\ 2x + 3 & ; x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - 3 \Rightarrow y + 3 = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow (y + 3)^2 - 1 = x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{(y + 3)^2 - 1} \xrightarrow{x \leq 0} x = -\sqrt{(y + 3)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{(x + 3)^2 - 1}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sqrt{\left(\frac{1}{x} + 3\right)^2 - 1} = -\frac{\sqrt{14x^2 + 6x + 1}}{x}$$

$$f(3x - 6) = x^2 + 4x \Rightarrow 3x - 6 = f^{-1}(x^2 + 4x) \quad (*)$$

$$x^2 + 4x = 21 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 7) = 0 \xrightarrow{x \geq 2} x = 3$$

$$x = 3 \xrightarrow{(*)} 3 \times 3 - 6 = f^{-1}(9 + 12) \Rightarrow f^{-1}(21) = 3$$

ابتدا تابع $(\frac{f}{g})(x)$ را که یک خط است، به دست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, 1 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{2-1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \\ \Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = 2x, x \neq 0$$

$$\begin{aligned} (\frac{f}{g})(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{g(x)} = 2x \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{(x-2)^2}{2x} \end{aligned}$$

f یک تابع ثابت است، بنابراین:

$$a - b = b \Rightarrow a = 2b$$

$$(2b, n), (a, b), (n, m) \Rightarrow n = b, m = b$$

$$n - m + a = b - b + 2b = 2b$$

$$D_{f+g} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f + g = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$$

باتوجه به نمودار داده شده نمودار g به صورت $g(x) = a(x + \frac{1}{p})^p - \frac{5}{4}$ است، باتوجه به اینکه $g(0) = -1$ است مقدار a برابر ۱ به دست می‌آید. پس:

$$g(x) = (x + \frac{1}{p})^p - \frac{5}{4} = x^p + x - 1$$

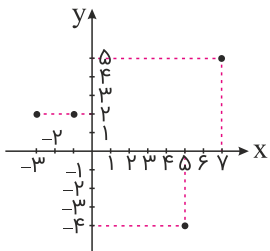
حال داریم:

$$\begin{cases} g \circ f(x) = f^p(x) + f(x) - 1 \\ g \circ f(x) = x^p - x^p - 1 \end{cases} \Rightarrow f^p(x) + f(x) - 1 = x^p - x^p - 1$$

$$\Rightarrow f^p(x) + f(x) - x^p + x^p = 0$$

$$\Rightarrow (f(x) + x^p)(f(x) - x^p + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x^p \\ f(x) = x^p - 1 \end{cases}$$



$$(7, 5) = (7, m^p - 4m) \Rightarrow m^p - 4m = 5$$

$$\Rightarrow m^p - 4m - 5 = 0 \Rightarrow m = -1, 5$$

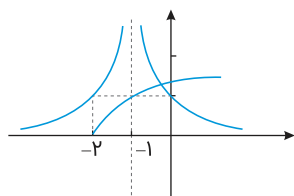
$$(-1, 2) \neq (-1, -4) \Rightarrow m \neq -1 \Rightarrow m = 5$$

تابع: $\{(7, 5), (-3, 2), (5, -4), (-1, 2)\}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{|(\sqrt{x+2})^2 - 1|} = \frac{1}{|x+1|}$$

$$\xrightarrow{f \circ g(x) = g(x)} \frac{1}{|x+1|} = \sqrt{x+2}$$

برای به دست آوردن تعداد جواب‌ها از روش رسم استفاده می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم معادله دارای یک جواب است.

باتوجه به شکل نمودار، برد تابع f روی بازه $[-3, 4]$ برابر است با $[-5, 4]$.

$$-5 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow -40 \leq 8f(x) \leq 32$$

$$\Rightarrow -40 - 5 \leq 8f(x) - 5 \leq 32 - 5 \Rightarrow -45 \leq g(x) \leq 27$$

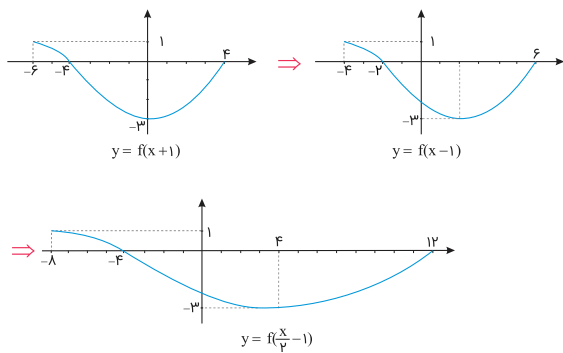
$$D_f = \{-1, 1, 0\}$$

$$D_g = \{2, 0, 1\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{1, 0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{4}{-1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{f}{g}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ \left(1, -\frac{1}{2}\right), (0, -1) \right\}$$

(*) مجموعه x هایی که به ازای آن $g(x) = 0$ می‌باشد، تهی است.



گزینه ۴

۲۲

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ به ازای $x \geq 0$ به صورت $y = x$ است، پس به ازای $2 \leq x < 3$ هم که زیرمجموعه‌ای از $x > 0$ می‌باشد، برابر $f(x) = x$ است.

تابع $[x]$ به ازای $2 \leq x < 3$ به صورت $[x] = 2$ در می‌آید، در نتیجه:

$$g(x) = 2 + 2 = 4 \Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = x - 4$$

گزینه ۴

۲۳

می‌دانیم:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq 3\left(\frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3}\right]\right) < 3$$

$$[x^2] + [-x^2] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد، با توجه به اینکه $[x^2] + [-x^2] = 0$ ، به رابطه $0 = 1$ می‌رسیم که غیرممکن است.

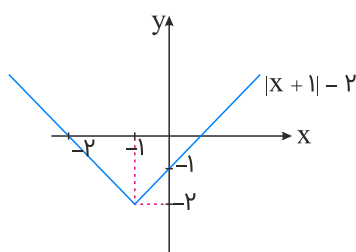
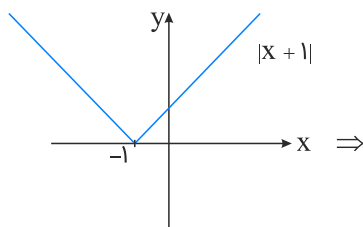
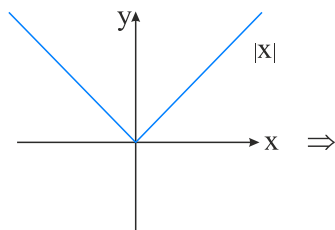
اگر $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$\underbrace{\left(x - 3\left[\frac{x}{3}\right]\right)}_{\text{مثبت}} \underbrace{\left([x^2] + [-x^2]\right)}_{-1} \underbrace{\left(x^2 + 2\right)}_{\text{مثبت}} = 1$$

↓
منفی

می‌بینیم که در این حالت هم به یک رابطه غیرممکن می‌رسیم.

نمودار $f(x) = |x + a| - b$ از انتقال $f(x) = |x|$ به اندازه a واحد به چپ و b واحد به پایین به دست می‌آید.

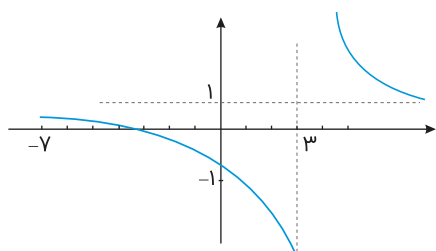


باتوجه به نمودارهای f و g ، ضابطه‌های آن‌ها برابر است با:

$$f(x) = x + ۴, \quad g(x) = x - ۵$$

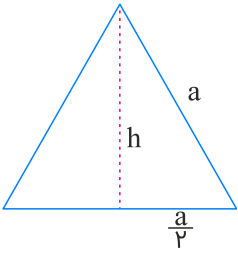
$$\Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{x + ۴}{x - ۵} = \frac{x - ۵ + ۹}{x - ۵} = ۱ + \frac{۹}{x - ۵}$$

برای رسم تابع $\frac{f}{g}$ باید نمودار $\frac{۱}{x}$ را ۵ واحد به راست انتقال دهیم، سپس مقدار تابع را ۹ برابر کرده و در آخر یک واحد به بالا می‌بریم:



بنابراین تابع $\frac{f}{g}$ از تمام نواحی عبور می‌کند.

می‌دانیم هر شش ضلعی منتظم متشکل است از شش مثلث متساوی‌الاضلاع.



مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع:

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{h \times a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=0} g(0) = \frac{3}{4} \Rightarrow (g^{-1} \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

فرض می‌کنیم $f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = x$ در این صورت $f(x) = \frac{3}{4}$ ، بنابراین:

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{x} = x - \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{16} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{4} \text{ ق ق } , x = \frac{1}{4} \text{ غ ق ق}$$

$$\xrightarrow{x=3} g(3) = -1 \Rightarrow (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = f^{-1}(-1)$$

اگر $f^{-1}(-1) = x$ ، آنگاه $f(x) = -1$ در این صورت:

$$x - \sqrt{x} = -1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0 \text{ غ ق ق}$$

$$\Rightarrow (g^{-1} \circ f)^{-1} = \left\{ \left(0, \frac{9}{4} \right) \right\}$$

نکته: اگر f تابع اکیداً نزولی و g تابع اکیداً صعودی باشد، $f(g(x))$ تابعی اکیداً نزولی است. به طور کلی می‌توان برای توابع صعودی علامت $(+)$ و برای توابع نزولی علامت $(-)$ در نظر گرفت و با ضرب کردن علامت‌ها، صعودی یا نزولی بودن تابع مرکب را تعیین کرد.

از آنجاکه $f(-2x+1)$ و $y = -2x+1$ توابعی اکیداً نزولی هستند، تابع f باید اکیداً صعودی باشد. مجدداً طبق همان نکته چون f و $y = x-1$ اکیداً صعودی هستند، تابع $f(x-1)$ اکیداً صعودی خواهد بود.

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(x-1) = 0 \xrightarrow{f(-1)=0} x-1 = -1 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \xrightarrow{f(x-1) \text{ اکیداً صعودی}} f(x-1) < f(-1) = 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow f(x-1) < 0$$

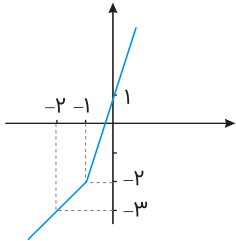
	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$1-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$	
y	$+$ ج	$+$ ج	$-$ ج	$+$ ج	$-$

$$D_y = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

بنابراین دامنهٔ تابع y شامل هیچ صحیح مثبتی نیست.

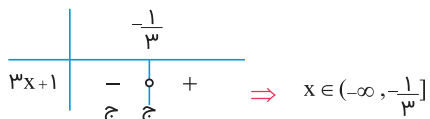
نکته: اگر f تابع اکیداً نزولی و g تابع اکیداً صعودی باشد، $f(g(x))$ تابعی اکیداً نزولی است. به طور کلی می‌توان برای توابع صعودی علامت $(+)$ و برای توابع نزولی علامت $(-)$ در نظر گرفت و با ضرب کردن علامت‌ها، صعودی یا نزولی بودن تابع مرکب را تعیین کرد.

$$f(x) = 2x + |x + 1| = \begin{cases} 3x + 1 & ; x \geq -1 \\ x - 1 & ; x < -1 \end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینیم شیب هردو ضابطه نمودار تابع f مثبت و در نتیجه اکیداً صعودی است. همچنین می‌دانیم تابع $g(x) = x^2$ به ازای $x \leq 0$ اکیداً نزولی است. بنابراین طبق نکته تابع $y = (2x + |x + 1|)^2$ به ازای x ‌هایی که $2x + |x + 1| \leq 0$ هستند، اکیداً نزولی خواهد بود.

$$2x + |x + 1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} & \text{ق ق} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 & \text{ق غ} \end{cases}$$



$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-۲}{x+۴} \Rightarrow \frac{x-۲}{g(x)} = \frac{x-۲}{x+۴} \Rightarrow g(x) = x+۴$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = x-۲ + x+۴ = ۲x+۲$$